Leçon n° 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I/ Polynômes d'endomorphismes.

A/ L'algèbre $\mathbb{K}[u]$. [MAN] [ROM]

Définition 1 : Définition de $P(u)$.

Proposition 2 : $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E) : P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres dont l'image est $\mathbb{K}[u]$.

Définition 3 : Polynôme minimal et idéal annulateur, qui existent toujours car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie.

Proposition 4 : $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$.

Exemple 5 : Le polynôme minimal d'une symétrie vectorielle qui n'est pas une homothétie est $X^2 - 1$.

Remarque 6 : Polynôme minimal d'une matrice, lien avec celui des endomorphismes.

Proposition 7 : $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) \in \mathbb{K}[u]^\times \iff P \wedge \pi_u = 1$.

Proposition 8 : $\mathbb{K}[u]$ est un corps si et seulement si $\mathbb{K}[u]$ est intègre, ce qui équivaut à π_u irréductible.

B/ Polynôme caractéristique. [G] [ROM] [MAN] [FGNAlg2]

Définition 9 : Polynôme caractéristique.

Proposition 10 : Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Corollaire 11 : On peut donc définir χ_u pour $u \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 12 : Cas de la dimension 2.

Algorithme 13 : Algorithme de Fadeev-LeVerrier pour le calcul du polynôme caractéristique (sommes de Newton pour exprimer les coefficients du polynôme caractéristique).

Proposition 14 : λ est valeur propre si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Application 15 : Matrice compagnon C_P, ses valeurs propres sont les racines de P.

Proposition 16 : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour tout $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 17 : La fonction $M \mapsto \chi_M$ est continue, mais pas $M \mapsto \pi_M$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Application 18 : L'ensemble des matrices nilpotentes est fermé pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

C/ Polynômes d'endomorphismes et sous-espaces stables. [MAN] [ROM]

Théorème 19 : Lemme des noyaux.

Application 20 : Cas où $\pi_u = \prod P_i^{\alpha_i}$.

Proposition 21 : Si F est u-stable, alors $\chi_{u|_F} | \chi_u$ et il en est de même pour le polynôme minimal.

II/ Application à la réduction des endomorphismes.

A/ Diagonalisation et trigonalisation. [BER] [ROM]

Définition 22 : Endomorphismes diagonalisables.

Proposition 23 : Critères pratiques de diagonalisation.

Proposition 24 : Critères basés sur les polynômes d'endomorphismes.

Application 25 : Une matrice est diagonalisable sur $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $X^p - X$ l'annule.

Définition 26 : Endomorphismes trigonalisables.

Proposition 27 : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Exemple 28 : Dans $\mathbb{C}$ algébriquement clos, tous les endomorphismes sont trigonalisables.

Développement 1

Théorème 29 : Décomposition de Dunford par la méthode de Newton.

B/ Réduction en sous-espaces stables. [ROM]

Théorème 30 : Réduction de Jordan.

Remarque 31 : Permet d'obtenir la matrice dans une forme privilégiée.

III/ Applications des polynômes d'endomorphismes.

A/ Calcul d'inverse et puissances. [MAN]

Proposition 32 : Si A est annulée par un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$, alors $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$ et on peut exprimer l'inverse.

Application 33 : Lorsque l'on connaît un polynôme annulateur P de u, on peut calculer u^k en effectuant la division euclidienne de X^k par P.

Exemple 34 : Cas de la dimension 2 dans tous les cas.

B/ Exponentielle de matrices. [ROM] [ZAV]

On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 35 : Exponentielle matricielle.

Proposition 36 : $e^A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Application 37 : Calcul de l'exponentielle matricielle avec décomposition de Dunford.

Application 38 : Résolution du système différentiel $Y' = AY$.

Développement 2

Proposition 39 : $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.

Lemme 40 : $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs.

Proposition 41 : $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 42 : $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2,\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre p. 174
— [MAN] Mansuy p. 1-48, p. 11
— [BER] Berhuy Algèbre le grand combat p. 972
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 603 et p. 643 et p. 675
— [ZAV] Zavidovique Un max de maths p. 48
— [FGNAlg2] Francinou, Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 79